

Thermodynamik I Formeln

Тоби

4. September 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Thermodynamische Systeme	3
1.1	Auftriebskraft	3
2	Erster Hauptsatz der Thermodynamik	3
2.1	Systemenergie	4
2.2	Volumenänderungsarbeit W_V im geschlossenem System	4
2.3	Druckänderungsarbeit W_D im offenem System	4
2.4	Reibarbeit W_R	4
2.5	Innere Energie u	4
2.6	Enthalpie h	4
3	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	5
3.1	Entropie	5
3.2	Entropieänderung	5
3.2.1	ideale Gase	5
3.2.2	Wärmeübergang	5
3.2.3	inkompressibles Fluid	5
3.3	Exergie eines thermodynamischen Zustands	6
3.4	Exergiebilanz	6
4	Ideales Gas	6
4.1	Innere Energie u und Enthalpie h	6
4.2	Zusammenhänge zwischen c_p und c_v	6
4.3	Zusammenhänge thermischer Zustandsgrößen mit n	7
4.4	Quasistationäre Zustandsänderungen idealer Gase	7
4.4.1	isochor	7
4.4.2	isobar	8
4.4.3	isotherm	8
4.4.4	isentrop	9
4.4.5	polytrop	10
4.5	Mischungen idealer Gase	11
4.5.1	Mischungsregel	12

5	Reales Gas	12
6	Dampftafeln	13
6.1	Zweiphasengebiet	13
6.2	Dampfgehalt	13
6.3	Lineare Interpolation	13
7	Kreisprozesse	14
7.1	Isentroper Wirkungsgrad	14
7.2	Gesamtwirkungsgrad η	14
7.3	Leistungsziffer ε	14
8	Konstanten	15

1 Thermodynamische Systeme

offen $\dot{m}_{sys} \neq 0$

geschlossen $\dot{m}_{sys} = 0$

stationär durchströmt $\dot{m}_{zu} = \dot{m}_{ab}, \dot{E}_{sys} = 0$

adiabat wärmeundurchlässig: $\dot{Q} = 0$

diabat wärmedurchlässig: $\dot{Q} \neq 0$

isotherm Temperatur T konstant, $n = 1$

isobar Druck p konstant, $n = 0$

isochor Volumen V konstant, $n = \infty$

isentrop adiabat, reversibel, $n = \kappa$

polytrop beliebige Änderung, $n \in R$

1.1 Auftriebskraft

$$F_a = V_{\text{verdrängt}} \rho_{\text{verdrängt}} g - m_{\text{stattdessen}} g$$

$$p = F/A; m = v\rho = V/v$$

2 Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Leistungsbilanz, bevorzugt für stationäre Systeme

$$\dot{E}_{sys} = \sum \dot{Q} + \sum \dot{W} + \sum \dot{m}(h + gz + \frac{c^2}{2})$$

$$\dot{e}_{sys} = \sum \dot{q} + \sum \dot{w} + \sum \dot{m}(h + gz + \frac{c^2}{2})$$

Energiebilanz, bevorzugt für instationäre Systeme

$$E_{sys,2} - E_{sys,1} = \sum Q_{12} + \sum W_{12} + \sum m_{12}(h + gz + \frac{c^2}{2})$$

$$e_{sys,2} - e_{sys,1} = \sum q_{12} + \sum w_{12} + (h_a - h_e) + g(z_a - z_e) + (\frac{c_a^2}{2} - \frac{c_e^2}{2})$$

2.1 Systemenergie

$$E_{sys} = E_{pot} + E_{kin} + U_{sys}$$

2.2 Volumenänderungsarbeit W_V im geschlossenem System

$$dW_V = \vec{F} d\vec{s} = pA ds = -p dV$$

$$W_V = \int_1^2 -p dV$$

$$w_V = \int_1^2 -p dv$$

Nutzanteil W_n

$$W_n = \int_1^2 -(p - p_\infty) dV$$

$$w_n = \int_1^2 -(p - p_\infty) dv$$

2.3 Druckänderungsarbeit W_D im offenem System

$$w_d = \int_1^2 v dp$$

2.4 Reibarbeit W_R

$$\begin{aligned} W_{R,Rührer} &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi \\ &= \int_1^2 M\omega dt \end{aligned}$$

2.5 Innere Energie u

(Geschlossenes System)

$$du = dq + p dv + dw_R$$

2.6 Enthalpie h

(Offenes System)

$$\begin{aligned} dh &= du + v dp + p dv \\ \text{ideales Gas} &\rightarrow c dT + v dp + p dv \end{aligned}$$

3 Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{S}_{ges} = \sum \dot{S}_Q + \sum \dot{m}s + \dot{S}_{irr}$$

- Adiabates System: $\sum \dot{S}_Q = 0$
- Stationäres System: $\dot{S}_{ges} = 0$
- Geschlossenes System: $\dot{m} = 0$

3.1 Entropie

$$ds = \frac{du + p dv}{T} = \frac{dh - v dp}{T}$$

3.2 Entropieänderung

3.2.1 ideale Gase

$$\begin{aligned} s_2 - s_1 &= c_v \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \\ &= c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \end{aligned}$$

3.2.2 Wärmeübergang

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \frac{\dot{q}}{T} \\ s &= \frac{q}{T} \\ \dot{q} &= T ds \end{aligned}$$

T : Temperatur an der Systemgrenze / Wand

3.2.3 inkompressibles Fluid

$$s_2 - s_1 = c(T_M) \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

3.3 Exergie eines thermodynamischen Zustands

geschlossenes System

$$ex = -w_{max} = -(u_1 - u_\infty) - T_\infty(s_1 - s_\infty) + p_\infty(v_1 - v_\infty)$$

offenes System

$$ex = -w_{max} = -(h_1 - h_\infty) - T_\infty(s_1 - s_\infty)$$

3.4 Exergiebilanz

$$\begin{aligned} \frac{d Ex_{sys}}{dt} &= \dot{Ex}_q + \dot{Ex}_w + \dot{Ex}_m - \dot{Ex}_v \\ \frac{d Ex_{sys}}{dt} &= \dot{m} \left(\int_1^2 \left(1 - \frac{T_\infty}{T}\right) dq + w_t + (ex + c dc + g dz) - ex_v \right) \end{aligned}$$

Ex_v : Exergieverlust

dq durch ersten Hauptsatz am System auflösen

$$\text{mit } T_2^* = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = T_1 \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\kappa-1}$$

4 Ideales Gas

4.1 Innere Energie u und Enthalpie h

$$\begin{aligned} du &= dq + p dv + dw_R \quad (\text{allgemein}) \\ du &= c_v dT \\ u_2 - u_1 &= c_v(T_2 - T_1) \\ dh &= du + p dv + v dp \quad (\text{allgemein}) \\ dh &= c_p dT \end{aligned}$$

4.2 Zusammenhänge zwischen c_p und c_v

$$\begin{aligned} \boxed{\kappa = \frac{c_p}{c_v}} \\ V = \text{const. / geschlossen: } c_v &= \frac{1}{\kappa-1} R \\ p = \text{const. / offen: } c_p &= \frac{\kappa}{\kappa-1} R \\ \text{zusammen: } R &= c_p - c_v \end{aligned}$$

4.3 Zusammenhänge thermischer Zustandsgrößen mit n

n siehe Kapitel 1, Seite 3

$$pv^n = \text{const.}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-n}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{-n}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{1-n}} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

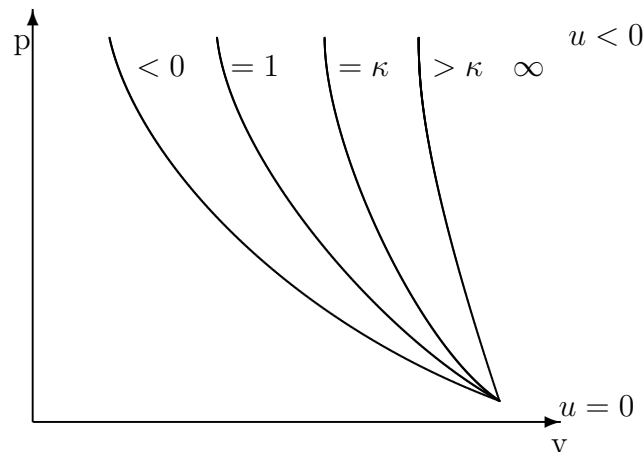


Abbildung 1: Zustandsänderungen mit verschiedenen Polytropenexponenten im p-v-Diagramm

4.4 Quasistationäre Zustandsänderungen idealer Gase

4.4.1 isochor

$$v = v_0 = \text{const.}, \quad dv = 0$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}}; \quad pv = RT; \quad V = mR\frac{T}{p}$$

geschlossen

$$dw_v = -p \, dv = 0 \quad \text{Volumenänderungsarbeit}$$

$$dw = dw_R \Rightarrow w_{12} = w_{R12}$$

$$dq = du - dw_R = T \, ds - dw_R$$

$$q_{12} = u_2 - u_1 - w_{R12} = \int_1^2 T \, ds - w_{R12}$$

$$= \bar{c}_v(T_2 - T_1) - w_{R12}$$

$$Q_{12} = mc_v(T_2 - T_1) - W_{R12}$$

offen

$$\begin{aligned}dw_D &= v_0 dp \Rightarrow w_D = v_0(p_2 - p_1) \\w_{t12} &= v_0(p_2 - p_1) + w_{R12} + \Delta e \\q_{12} &= h_2 - h_1 - v_0(p_2 - p_1) - w_{R12} \\&= \int_1^2 T ds - w_{R12} = u_2 - u_1 - w_{R12} \\&= \bar{c}_v(T_2 - T_1) - w_{R12} \\ \frac{w_{t12,rev}}{q_{12,rev}} &= \frac{R}{\bar{c}_v} = \kappa - 1 > 0 \quad (\Delta e = 0)\end{aligned}$$

4.4.2 isobar

$$p = p_0 = \text{const.}, dp = 0$$

$$n = 0$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dT}{T}, pv = RT = \text{const}, \frac{p_2}{p_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

geschlossen

$$\begin{aligned}dw_v &= -p dv = 0 \rightarrow w_{v12} = -p_0(V_2 - v_1) \\w_{12} &= -p_0(V_2 - v_1) + w_{R12} \\dq &= du + p_0 dv - dw_R = T ds - dw_R \\q_{12} &= u_2 - u_1 + p_0(v_2 - v_1) - w_{R12} = \int_1^2 T ds - w_{R12} = h_2 - h_1 - w_{R12} \\&= \bar{c}_v(T_2 - T_1) - w_{R12}\end{aligned}$$

offen

$$\begin{aligned}dw_D &= v dp = 0 \quad \text{Druckänderungsarbeit} \\w_{t12} &= w_{R12} + \Delta e \\q_{12} &= h_2 - h_1 - w_{R12} = \int_1^2 T ds - w_{R12} \\&= \bar{c}_v(T_2 - T_1) - w_{R12} \\ \frac{w_{t12,rev}}{q_{12,rev}} &= -\frac{R}{\bar{c}_p} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} < 0 \quad (\Delta e = 0)\end{aligned}$$

4.4.3 isotherm

$$T = T_0 = \text{const.}$$

$$n = 1$$

$$\boxed{\frac{v_1}{v_2} = \frac{p_2}{p_1}} \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} = 0, \frac{v}{T} = \frac{R}{p_0}, \frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

geschlossen

$$\begin{aligned} du &= c_v dT = 0 \\ dw &= -p dv + dw_R - RT_0 \frac{dv}{v} + dw_R \\ w_{12} &= - \underbrace{RT_0}_{mv} \ln \left(\underbrace{\frac{v_2}{v_1}}_{\frac{p_1}{p_2}} \right) + w_{R12} \\ dq &= p dv - dw_R = T_0 ds - dw_R \\ q_{12} &= RT_0 \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) - w_{R12} \\ &= T_0 (s_2 - s_1) - w_{R12} \end{aligned}$$

offen

$$\begin{aligned} dh &= c_p dT = 0 \\ w_{t12} &= \int_1^2 c dp + w_{R12} + \Delta e \\ &= RT_0 \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) + w_{R12} + \Delta e \\ q_{12} &= - \int_1^2 v dp - w_{R12} = \int_1^2 T_0 ds - w_{R12} \\ &= -RT_0 \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) - w_{R12} = T_0 (s_2 - s_1) - w_{R12} \\ \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) &= - \ln \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \\ \frac{w_{12,rev}}{q_{12,rev}} &= -1 \quad (\Delta e = 0) \end{aligned}$$

4.4.4 isentrop

$$ds = dq + dw_R = 0$$

$$n = \kappa$$

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{-\kappa} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}$$

geschlossen

reversibel adiabat: $dq = dw_r = 0$

$$\begin{aligned} dw_{rev} &= -p dv \\ w_{12} &= - \int_1^2 p dv \\ dq &= du + p dv = 0 \\ -p dv &= du = c_v dT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dT &= -\frac{p \, dv}{c_v} = -(\kappa - 1) \frac{T \, dv}{v} \\
w_{12,rev} &= u_2 - u_1 = \frac{RT_1}{\kappa - 1} \frac{T_2}{T_1} - 1 \\
&= \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \\
&= \frac{RT_1}{\kappa - 1} \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{\kappa-1} - 1
\end{aligned}$$

irreversibel diabat: $dq = -dw_r < 0$

$$\begin{aligned}
dw &= -p \, dv + dw_r \\
w_{12} &= -\int_1^2 p \, dv + w_{R12} = w_{12,rev} + w_{12,R}
\end{aligned}$$

offen

reversibel adiabat: $dq = dw_r = 0$

$$\begin{aligned}
w_{t12,rev} &= \int_1^2 v \, dp + \Delta e \\
q_{12} &= h_2 - h_1 - \int_1^2 v \, dp = 0 \\
\int_1^2 v \, dp &= h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1) \\
dT &= \frac{v \, dp}{c_p} = (\kappa - 1) \frac{T \, dp}{\kappa p} \\
w_{t12,rev} &= \frac{\kappa}{\kappa - q} RT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + \Delta e \\
&= \frac{\kappa}{\kappa - q} RT_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right) + \Delta e \\
&= \kappa w_{12,rev} + \Delta e
\end{aligned}$$

irreversibel diabat: $dq = dw_r = 0$

$$\begin{aligned}
w_{t12} &= \int_1^2 v \, dp + w_{R12} + \Delta e = w_{t12,rev} + w_{R12} \\
w_{t12,rev} &= \kappa w_{12,rev} + \Delta e
\end{aligned}$$

4.4.5 polytrop

$$Q_{12} = \frac{\kappa - n}{\kappa - 1} W_{12}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^{-n} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}}; \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^{n-1}$$

geschlossen

$$\begin{aligned}
 w_{12} &= - \int_1^2 p \, dv + w_{R12} \\
 &= \frac{RT_1}{n-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + w_{R12} \\
 &= \frac{RT_1}{n-1} \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) + w_{R12} \\
 q_{12} &= u_2 - u_1 + \int_1^2 p \, dv - w_{R12} \\
 &= c_v(T_2 - T_1) - \frac{R}{n-1}(T_2 - T_1) - w_{R12} \\
 &= \frac{n-\kappa}{(\kappa-1)(n-1)} RT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) - w_{R12} \\
 \frac{w_{12,rev}}{q_{12,rev}} &= \frac{\kappa-1}{n-\kappa} \\
 w_{12,rev} &= \frac{RT_1}{n-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

offen

$$\begin{aligned}
 w_{t12} &= - \int_1^2 v \, dp + w_{R12} + \Delta e \\
 &= \frac{n}{n-1} RT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) + w_{R12} + \Delta e \\
 &= \frac{n}{n-1} RT_1 \left(\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right) + w_{R12} + \Delta e \\
 q_{12} &= h_2 - h_1 + \int_1^2 v \, dp - w_{R12} \\
 &= c_v(T_2 - T_1) - \frac{nR}{n-1}(T_2 - T_1) - w_{R12} \\
 &= \frac{n-\kappa}{(\kappa-1)(n-1)} RT_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) - w_{R12} \\
 \frac{w_{t12,rev}}{q_{12,rev}} &= n \frac{\kappa-1}{n-\kappa} \quad (\text{für } \Delta e = 0) \\
 w_{12,rev} &= n \frac{RT_1}{n-1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

4.5 Mischungen idealer Gase

Index M : Mischung

$$\begin{aligned}
 \text{Massenverhältnis} \quad \xi_i &= \frac{m_i}{m_M} = \gamma_i \frac{M_i}{M_M} = \gamma_i \frac{R_m}{R_i} \\
 \text{Molenbruch} \quad \gamma_i &= \frac{n_i}{n_M} = \frac{v_i}{v_M} = \xi_i \frac{R_i}{R_M} = \xi_i \frac{M_M}{M_i}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{v,M} &= \sum_i \xi_i \cdot c_{v,i} \\
p_i &= \gamma_i \cdot p_M \\
R_M &= \sum_i \xi_i \cdot R_i = \frac{R_M}{M_M} \\
M_M &= \sum_i \gamma_i \cdot M_i = \frac{\sum m_i}{\sum n_i} = \frac{R_m}{R_M}
\end{aligned}$$

4.5.1 Mischungsregel

$$\begin{aligned}
c_1 m_1 T_1 + c_2 m_2 T_2 + \dots &= T_M \\
c_1 m_1 (T_1 - T_M) &= c_2 m_2 (T_M - T_2)
\end{aligned}$$

??? Sonst über ersten Hauptsatz.

5 Reales Gas

thermisch (Van der Waals)

$$\begin{aligned}
\left(p + \frac{a}{v^2}\right) \cdot (v - b) &= RT \\
a &= 3p_{krit} v_{krit}^2 = \frac{3p_{krit}}{\rho_{krit}^2} \\
b &= \frac{v_{krit}}{3} = \frac{1}{3\rho_{krit}}
\end{aligned}$$

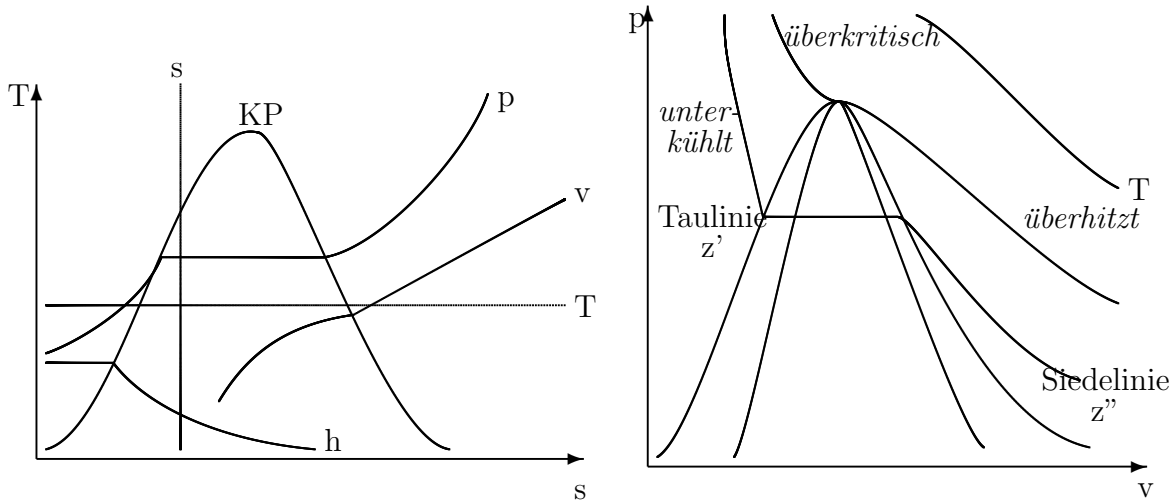
kalorisch

$$du = d_v DT + \frac{a}{v^2} dv$$

für $du = 0$: $T_2 = T_1 - \frac{a}{c_v} \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right)$

6 Dampftafeln

6.1 Zweiphasengebiet



T-s Diagramm und p-v-Diagramm für Nassdampfgebiet

$u = h - pv$ verläuft mit stärkerer Steigung als h

6.2 Dampfgehalt

$$x = \frac{m_D}{m_{Fl} + m_D} = \frac{m''}{m' + m''}$$

für Zustandsgrößen $z : h, u, v, s$

$$x = \frac{z - z'}{z'' - z'}$$

$$\Rightarrow z = z' + x(z'' - z')$$

Innere Energie: $u = h - pv$, p in $[bar] \cdot 100$

6.3 Lineare Interpolation

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

$$y = y' + (x - x') \cdot \frac{y'' - y'}{x'' - x'}$$

7 Kreisprozesse

rechtslaufend Wärmekraftprozesse

<i>einphasig</i>	Joule	Otto	Diesel	Seiliger	Carnot	Stirling	Ericsson
	s-p-s-p	s-v-s-v	s-p-s-v	s-v-p-s-v	s-T-s-T	T-v-T-v	T-p-T-p
<i>zweiphasig</i>	Rankine						
	s-p-s-p						

Bei Carnot, Stirling und Ericsson-Prozess gilt: $\eta_c = \eta_{th}$ (Nur theoretisch funktionierende Prozesse)

linkslaufend Kälteprozesse, Wärmepumpen

7.1 Isentroper Wirkungsgrad

$$\begin{array}{l}
 \text{Turbine} \quad \eta_{is,T} = \frac{h_2 - h_1}{h_2^* - h_1} \xrightarrow{\text{ideales Gas}} \frac{T_2 - T_1}{T_2^* - T_1} \\
 \text{Verdichter} \quad \eta_{is,V} = \frac{h_2^* - h_1}{h_2 - h_1} \xrightarrow{\text{ideales Gas}} \frac{T_2^* - T_1}{T_2 - T_1}
 \end{array}$$

h_2^* hat die selbe Entropie s wie in Zustand h_1 !

$$\frac{T_2^*}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{1-\kappa}$$

7.2 Gesamtwirkungsgrad η

$$\eta_{ges} = \frac{|\text{Nutzen}| - |P_{el,Speisepumpe}|}{|\text{Aufwand}|}$$

7.3 Leistungsziffer ε

$$\varepsilon = \frac{\sum |Q|}{|P_{el}|}$$

8 Konstanten

allgemeine Gaskonstante	$R_m = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol K}}$
spezifische Gaskonstante	$R = \frac{R_m}{M}$
spezifisches Volumen	$v = \frac{V}{m}$
Molmasse	$M = \frac{m}{n} = \frac{pV}{nRT} = \frac{mN_A}{N} \frac{\text{g}}{\text{mol}}$
Teilchenzahl	N
Avogadrokonstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}}$
bar \leftrightarrow N/m ²	$1 \text{bar} \hat{=} 1 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$
1ℓ	10^{-3}m^3
1cm ³	10^{-6}m^3
0°C	$273,15 \text{K}$